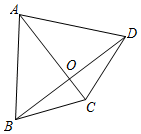
**2023年九年级数学中考复习：猜想与证明综合压轴题**

1．若四边形的一条对角线把四边形分成两个等腰三角形，则这条对角线叫做这个四边形的“巧分线”，这个四边形叫“巧妙四边形”，若一个四边形有两条巧分线，则称为“绝妙四边形．



（1）下列四边形一定是巧妙四边形的是　 ．（填序号）

①平行四边形；②矩形；③菱形；④正方形．

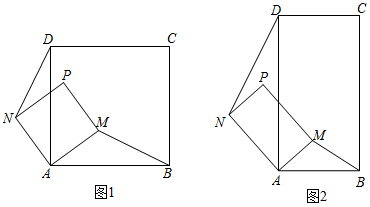
【初步应用】

（2）如图，在绝妙四边形*ABCD*中，*AC*＝*AD*，且*AC*垂直平分*BD*，若∠*BAD*＝80°，求∠*BCD*的度数．

【深入研究】

（3）在巧妙四边形*ABCD*中，*AB*＝*AD*＝*CD*，∠*A*＝90°，*AC*是四边形*ABCD*的巧分线，请直接写出∠*BCD*的度数．

2．四边形*ABCD*和四边形*AMPN*有公共顶点*A*，连接*BM*和*DN*．

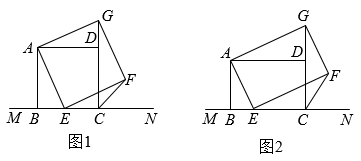


(1)如图1，若四边形*ABCD*和四边形*AMPN*都是正方形，当正方形*AMPN*绕点*A*旋转角（）时，*BM*和*DN*的数量关系是\_\_\_\_\_\_\_\_，位置关系是\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)如图2，若四边形*ABCD*和四边形*AMPN*都是矩形，且，判断*BM*和*DN*的数量关系和位置关系，并说明理由；

(3)在（2）的条件下，若，矩形*AMPN*绕点*A*逆时针旋转角（），当时，求线段*DN*的长．

3．如图1，已知正方形在直线的上方，在直线上，是上一点，以为边在直线的上方作正方形.



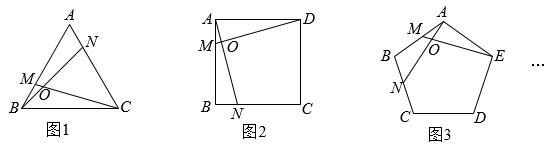
（1）连结，求证：.

（2）连结，观察并猜测的度数，并说明理由.

（3）如图2，将图1中正方形改为矩形，，（、为常数），是线段上一动点（不含端点、），以为边在直线的上方作矩形，使顶点恰好落在射线上.判断当点由向运动时，的大小是否总保持不变，若的大小不变，请用含、的代数式表示的值；若的大小发生改变，请举例说明.

4．请阅读，完成证明和填空.

九年级数学兴趣小组在学校的“数学长廊”中兴奋地展示了他们小组探究发现的结果，内容如下：



（1）如图1，正三角形中，在、边上分别取点、，使，连结、，发现，且.

请证明：.

（2）如图2，正方形中，在、边上分别取点、，使，连结、，那么\_\_\_\_\_\_，且\_\_\_\_\_\_度.

（3）如图3，正五边形中，在、边上分别取点、，使，连结、，那么\_\_\_\_\_\_，且\_\_\_\_\_\_度.

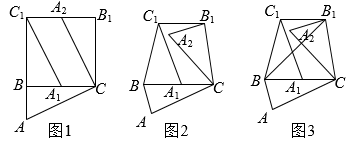
（4）在正边形中，对相邻的三边实施同样的操作过程，也会有类似的结论.

请大胆猜测，用一句话概括你的发现：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

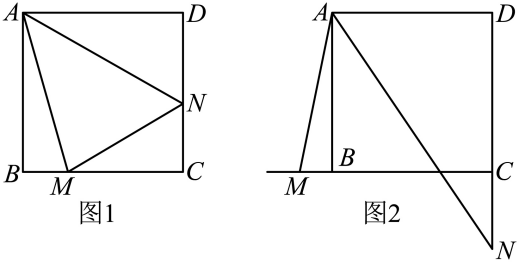
5．（1）如图1，在*Rt*△*ABC*中，∠*ABC*=90°，以点*B*为中心，把△*ABC*逆时针旋转90°，得到△*A1BC1*；再以点*C*为中心，把△*ABC*顺时针旋转90°，得到△*A2B1C*，连接*C1B1*，则*C1B1*与*BC*的位置关系为 ；

（2）如图2，当△*ABC*是锐角三角形，∠*ABC*=α（α≠60°）时，将△*ABC*按照（1）中的方式旋转α，连接*C1B1*，探究*C1B1*与*BC*的位置关系，写出你的探究结论，并加以证明；

（3）如图3，在图2的基础上，连接*B1B*，若*C1B1*=*BC*，△*C1BB1*的面积为4，则△*B1BC*的面积为 ．



6．如图，正方形*ABCD*中，，绕点*A*顺时针旋转，它的两边分别交*BC*、*DC*（或它们的延长线）于点*M*、*N*．

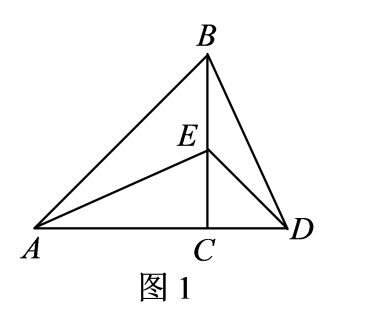
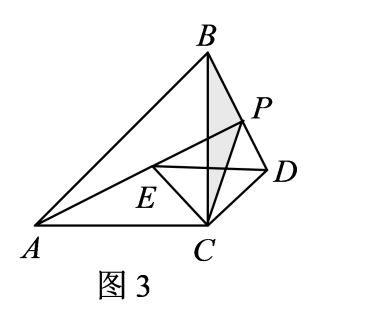
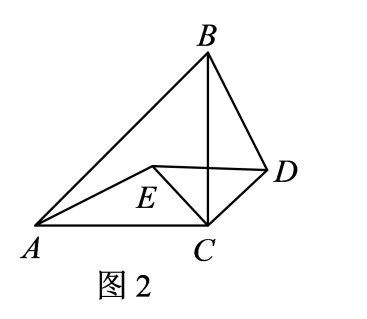


(1)如图1，求证：；

(2)当，时，求的面积；

(3)当绕点*A*旋转到如图2位置时，线段*BM*、*DN*和*MN*之间有怎样的数量关系？请写出你的猜想并证明．

7．如图，在等腰和等腰中，．

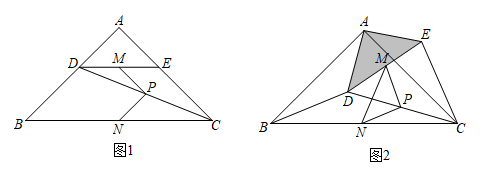
 

(1)观察猜想：如图1，点在上，线段与的关系是\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)探究证明：把绕直角顶点旋转到图2的位置，（1）中的结论还成立吗？说明理由；

(3)拓展延伸：把绕点在平面内转动一周，若，，、交于点时，连接，直接写出最大面积\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

8．如图1，在*Rt*△*ABC*中，∠*A*=90°，*AB*=*AC*，点*D*，*E*分别在边*AB*，*AC*上，*AD*=*AE*，连接*DC*，点*M*，*P*，*N*分别为*DE*，*DC*，*BC*的中点．

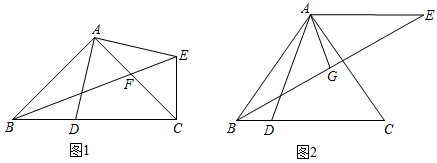


(1)观察猜想：图1中，请判断线段*PM*与*PN*的数量关系和位置关系，并说明理由；

(2)探究证明：把△*ADE*绕点*A*逆时针方向旋转到图2的位置，连接*MN*，*BD*，*CE*，判断△*PMN*的形状，并说明理由；

(3)拓展延伸：把△*ADE*绕点*A*在平面内自由旋转，若*AD*=3，*AB*=7，请直接写出△*PMN*面积的最大值．

9．在中，，*D*是边上一动点，连接，将绕点*A*逆时针旋转到的的位置，使得；



(1)如图1，当，连接交于点*F*，若平分，，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

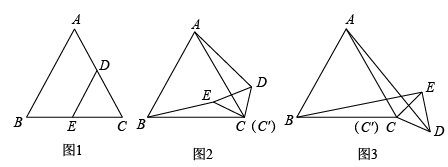
(2)在（1）的条件下，求的长；

(3)如图2，连接，取的中点*G*，连接，猜想与存在的数量关系，并证明．

10．阅读理解

图1是边长分别为和（）的两个等边三角形纸片和叠放在一起（与重合）的图形．

操作与证明：



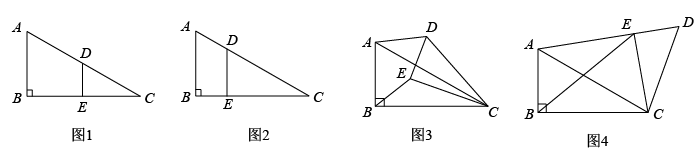
(1)操作：固定，将绕点按顺时针方向旋转，连接、，如图2，在图2中，线段与之间具有怎样的大小关系？证明你的结论；

(2)若将图1中的绕点按顺时针方向任意旋转一个角度，连接、，如图3，图3中线段与之间具有怎样的大小关系？证明你的结论；

猜想与发现：

(3)根据上面的操作和思考过程，请你猜想当为\_\_\_\_\_\_度时，线段的长度最大，当为某个角度时，线段的长度最小，最小是\_\_\_\_\_\_．

11．在中，，点*D*、*E*分别在*AC*、*BC*边上．



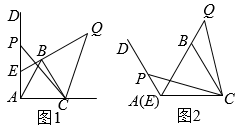
(1)如图1，若*D*、*E*分别为边*AC*、*BC*的中点，连接*DE*，则\_\_\_\_\_\_；

(2)如图2，若*D*为*AC*边上任意一点，，则\_\_\_\_\_\_；

(3)如图3，在图2的基础上将绕点*C*按顺时针方向旋转一定的角度，猜想的值，并证明你的结论；

(4)如图4，在（3）的条件下，当将旋转，使点*E*在线段*AD*上时，若，请直接写出*BE*的长，不必写出求解过程．

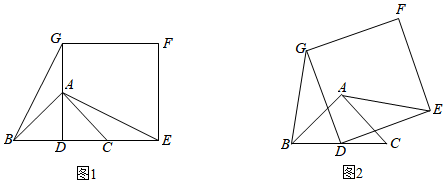
12．已知中，，，点*P*为射线*AD*上任意一点（点*P*与点*A*不重合）．连接*CP*，将线段*CP*绕点*C*顺时针旋转60°得到线段*CQ*，连接*QB*并延长交直线*AD*于点*E*．



(1)如图1，当时，试猜想*BC*与*QE*的位置关系，并说明理由；

(2)如图2，当，时，点*E*恰好与点*A*重合，若，求*BQ*的长．

13．如图，已知△*ABC*是等腰直角三角形，∠*BAC*＝90°，点*D*是*BC*的中点．作正方形*DEFG*，使点*A*、*C*分别在边*DG*和*DE*上，连接*AE*，*BG*．

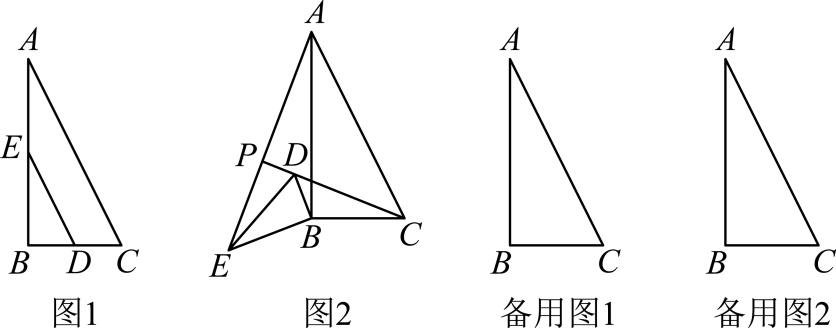


(1)猜想线段*BG*和*AE*的数量关系是 　 　；

(2)将正方形*DEFG*绕点*D*逆时针方向旋转α（0°＜α≤360°）．判断（1）中的结论是否仍然成立？请利用图（2）证明你的结论；

(3)在（2）的条件下，若*BC*＝*DE*＝8，当*AE*＝*AG*时，直接写出*AF*＝　 　．

14．如图，已知*Rt*△*ABC*中，∠*ABC*＝90°，*BC*=4，*BA*＝8，点*D*、*E*分别为*BC*、*BA*的中点，作直线*AE*、*CD*，设它们的交点为点*P*．



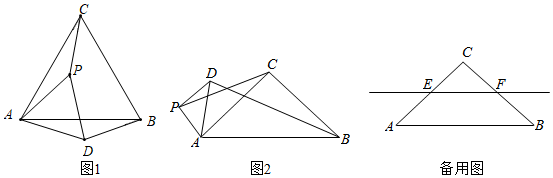
(1)猜想：在旋转的过程中，线段*AE*、*CD*有怎样的数量和位置关系？答：        、            ．

(2)利用图2，证明你在（1）中的猜想．

(3)当点*D*恰好落在直线*AE*上时，求线段*PC*的长．

(4)在旋转过程中，直接写出△*PBC*面积的最大值．

15．在△*ABC*中，*CA*＝*CB*，∠*ACB*＝α．点*P*是平面内不与点*A*，*C*重合的任意一点，将线段*AP*绕点*P*逆时针旋转α得到线段*DP*，连接*AD*，*BD*，*CP*．



(1)观察猜想

如图1，当α＝60°时，的值是　 　，直线*BD*与直线*CP*相交所成的较小角的度数是　 　．

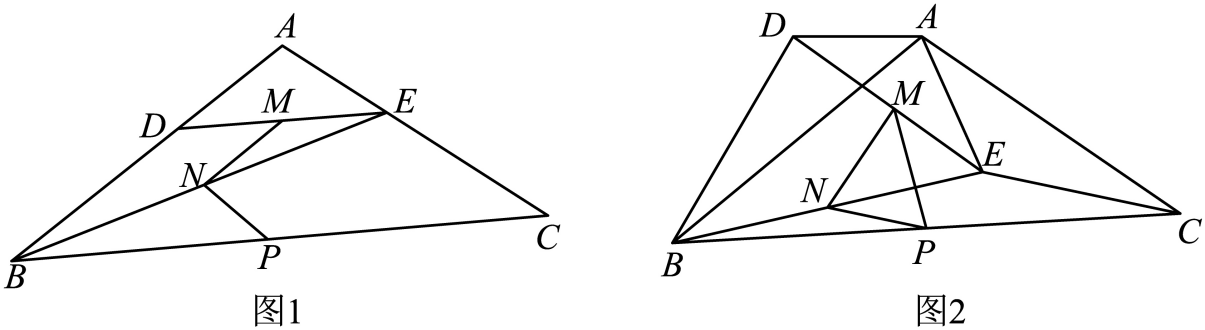
(2)类比探究

如图2，当α＝90°时，请写出，并就图2的情形说明理由．

(3)解决问题

当α＝90°时，若点*E*，*F*分别是*CA*，*CB*的中点，点*P*在直线*EF*上，请直接写出点*C*，*P*，*D*在同一直线上时的值．

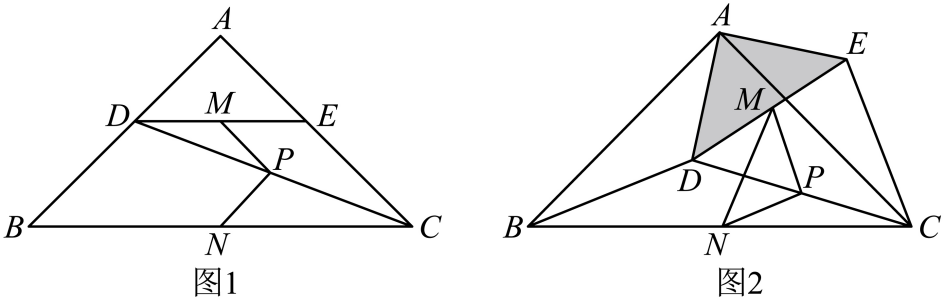
16．如图，在等腰三角形中，，，，连接，点、、分别为、、的中点．



(1)观察猜想：图中，点、分别在边、上，线段、的数量关系是\_\_\_\_\_\_，的大小为\_\_\_\_\_\_；

(2)探究证明：把绕点顺时针方向旋转到如图所示的位置，连接、、，图中的结论还成立吗？若成立，请证明；若不成立，请说明理由．

17．如图1，在中，，，点，分别在边，上，，连接，点，，分别为，，的中点．

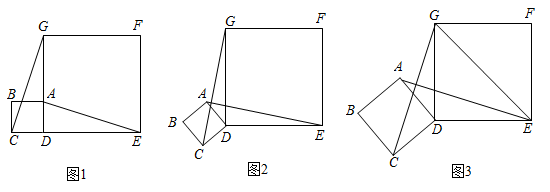


(1)观察猜想：图1中，线段与的数量关系是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，位置关系是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2)探究证明：把绕点逆时针方向旋转到图2的位置，连接，，，判断的形状，并说明理由；

(3)拓展延伸：把绕点在平面内自由旋转，若，，请直接写出面积的最大值．

18．如图1，四边形*ABCD*和四边形*DEFG*都是正方形，点*A*在*DG*上，连接*AE*，*CG*．



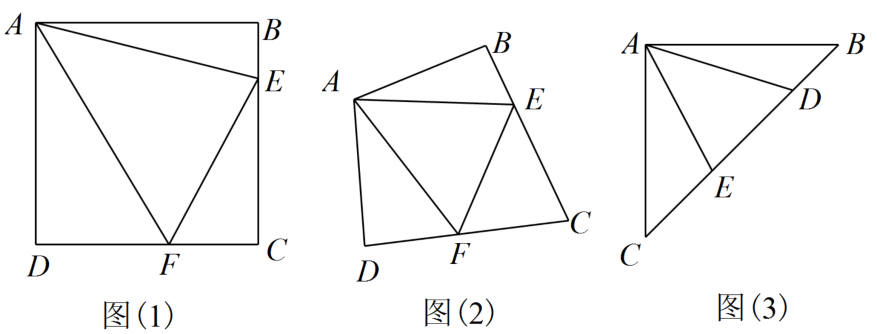
(1)求证：；

(2)猜想：*AE*与*CG*之间的位置关系，并证明你的猜想；

(3)在其它条件不变的前提下，如果将正方形*ABCD*绕着点*D*按逆时针旋转任意角度（如图2）．那么（2）中结论是否还成立？若成立，请给出证明；若不成立，请说明理由；

(4)如图3，将正方形*ABCD*绕着点*D*旋转到某一位置时恰好使得，．当正方形*DEFG*的边长为时，请直接写出正方形*ABCD*的边长．

19．探究题∶

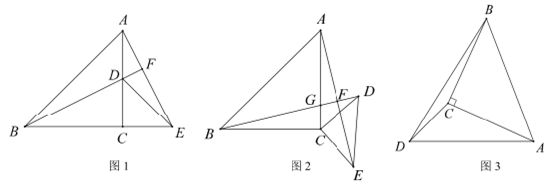


(1)特殊情景：如图（1），在四边形*ABCD*中，*AB*=*AD*，以点*A*为顶点作一个角，角的两边分别交*BC*，*CD*于点*E*，*F*，且∠*EAF*=∠*BAD*，连接*EF*，若∠*BAD*=∠*B*=∠*D*=90°，探究：线段*BE*，*DF*，*EF*之间的数量关系，并说明理由

(2)类比猜想：类比特殊情景，在上述（1）条件下，把“∠*BAD*=∠*B*=∠*D*=90°”改成一股情况“∠*BAD*=*α* ， ∠*B*+∠*D*=180°，”如图（2），小明猜想：线段*BE*，*DF*，*EF*之间的数量关系是否仍然成立？若成立，请你写出结论；若不成立，请你写出成立时*α*的取值范围．

(3)解决问题：如图（3），在△*ABC*中，∠*BAC*=90°，*AB*=*AC*=4，点*D*，*E*均在边*BC*上，且∠*DAE*=45°，若*BD*=，计算*DE*的长度．

20．△*ABC*和△*DEC*是等腰直角三角形，，，．



(1)【观察猜想】当△*ABC*和△*DEC*按如图1所示的位置摆放，连接*BD*、*AE*，延长*BD*交*AE*于点*F*，猜想线段*BD*和*AE*有怎样的数量关系和位置关系．

(2)【探究证明】如图2，将△*DCE*绕着点*C*顺时针旋转一定角度，线段*BD*和线段*AE*的数量关系和位置关系是否仍然成立？如果成立，请证明：如果不成立，请说明理由．

(3)【拓展应用】如图3，在△*ACD*中，，，，将*AC*绕着点*C*逆时针旋转90°至*BC*，连接*BD*，求*BD*的长．

**参考答案：**

1．（1）③④；（2）∠*BCD*＝140°；（3）∠*BCD*的度数是45°或135°或90°．

2．(1)相等；垂直；

(2)数量关系：；位置关系：*BM*⊥*DN*

(3)3或．

4．（2）DM，90°;（3）EM，108°;

5．（1）平行；（2）平行；（3）6．

6．(1)见解析

(2)6

(3)，证明见解析

7．(1)，；

(2)结论仍成立，

(3)．

8．(1)*PM*=*PN*，*PM*⊥*PN*．

(2)△*PMN*是等腰直角三角形．

(3)S△*PMN最大*=

9．(1)2

(2)

(3)*AG*=*CD*，

10．(1)*BE*=*AD*，

(2)*BE*=*AD*，

(3)180°，*a*-*b*

11．(1)

(2)

(3)，

(4)

12．(1)，

(2)

13．(1)*BG*=*AE*

(2)结论成立，

(3)或

14．(1)*AE**CD*，*AE*＝2*CD*

(3)或

(4)4+2

15．(1)1，60°

(2)

(3)2+或2-

16．(1)，

(2)成立，

17．(1)，

(2)等腰直角三角形，

(3)

18． (2)*AE*⊥*CG*．

(3)（2）中结论仍然成立．

(4)

19．(1)*BE*+*DF*＝*EF*

(2)*EF*＝*BE*+*DF*成立，

(3)*DE*

20．(1) ，

(2)成立

(3)